

Title	一階偏微分作用素のParametrixについて (函数解析的方法による偏微分方程式の研究)
Author(s)	赤松, 豊博
Citation	数理解析研究所講究録 (1974), 205: 74-86
Issue Date	1974-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/105149
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

一階偏微分作用素の parametrix について

阪大 理 赤松 豊博

§ 0 序

$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\psi(x)\sigma(t)\frac{\partial}{\partial x}$ を、開集合 $\Omega = (a, b) \times (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}_x^1 \times \mathbb{R}_t^1$ $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ 、 $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$ で定義された二変数一階偏微分作用素とする。L に対する或る弱い意味でのパラメトリクスを、次の二つの仮定の下で構成し、方程式

(0-1) \cdots $Lu = f$ $\text{in } \Omega$ の解の評価を調べる。

< 仮定 >

(0-2) \cdots $\psi \in C^\infty((a, b))$ 。ψ の全ての階数の微分係数は有界

(0-3) \cdots $\sigma \in C^\infty((\alpha, \beta))$ 。σ(t) ≥ 0 $\text{in } (\alpha, \beta)$ 。σ の零点次数は全て有限。

方程式 (0-1) は、仮定 (0-2) (0-3) の下で、 Ω に於て局所可解である。(cf. [1] [5])。しかし必ずしも hypoelliptic であるとは、一般には言えない。(cf. [7])。

方程式 (0-1) の解として次の形のものを考える。

$$(0-4) \quad \dots u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda \int_0^t \sigma(s) ds) V(x, \frac{t}{\lambda}) d\lambda$$

形式的に計算して、次式を得る。

$$(0-5) \quad \dots Lu = \frac{\sigma(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda \int_0^t \sigma(s) ds) (\frac{t}{\lambda} V(x, \frac{t}{\lambda}) + \gamma(x) \frac{\partial}{\partial x} V(x, \frac{t}{\lambda})) d\lambda$$

$f \in C_0^\infty(\alpha; \beta)$ が、 $f = 0$ near $\{t \mid \sigma(t) = 0\}$ である時、

$$(0-6) \quad \dots f(t) = \frac{\sigma(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda \int_0^t \sigma(s) ds) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\lambda \int_0^t \sigma(s) ds) g(t') dt' \right) d\lambda$$

である事に注意すれば、方程式

$$(0-7) \quad \dots \lambda V(x, \frac{t}{\lambda}) + \gamma(x) \frac{\partial}{\partial x} V(x, \frac{t}{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\lambda \int_0^t \sigma(s) ds) f(x, t') dt'$$

の解を、(0-4)に代入した時、 u が(0-1)の解を与える事が予想出来る。

§1 予備定理

§0に述べた事を正当化し、parametrixを構成する為の予備定理を述べる。

Lemma 1-1

γ は(0-2)を満足するとする。 γ を実パラメーターと見て、次の方程式を考える。

$$(1-1) \quad \dots \lambda V(x) + \gamma(x) \frac{d}{dx} V(x) = f(x) \quad \text{in } (a, b)$$

この時、任意の自然数 k に対して適当な定数 C_k が存在し、次の事が成立する。即ち、 $|\lambda| > C_k$ に対し、linear mapping $S_k : C_0^{k+1}((a, b)) \longrightarrow C_0^k((a, b))$ で、次の性質を持つものが存在する。

$$(1-2) \quad \dots \quad \frac{1}{2} S_{\frac{1}{2}} f + \psi \frac{d}{dx} S_{\frac{1}{2}} f = f \quad \text{in } (a, b)$$

$$(1-3) \quad \dots \quad \psi \frac{d}{dx} S_{\frac{1}{2}} f = S_{\frac{1}{2}} (\psi \frac{d}{dx} f)$$

$$(1-4) \quad \dots \quad S_{\frac{1}{2}} f(x) \text{ を、 } (x, \frac{1}{2}) \text{ の関数と見る時、 } \frac{\partial^p}{\partial x^p} S_{\frac{1}{2}} f \text{ は} \\ (a, b) \times \{ \frac{1}{2} \mid |\frac{1}{2}| > C_f \} \text{ で存在し連続、更に } \frac{1}{2} \text{ に関} \\ \text{し無限回連続可微分。 (但し } 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \text{)}.$$

C を f に無関係な定数として次の不等式が成立。

$$(1-4-1) \quad \dots \quad \left| \frac{\partial^N}{\partial \frac{1}{2}^N} \frac{\partial^p}{\partial x^p} S_{\frac{1}{2}} f \right| \leq C (1+|\frac{1}{2}|)^{-N+1} \sup_{a < x < b} \sum_{0 \leq l \leq p} \left| \frac{d^l}{dx^l} f(x) \right|$$

$$(1-4-2) \quad \dots \quad \int_a^b \left| \frac{\partial^N}{\partial \frac{1}{2}^N} \frac{\partial^p}{\partial x^p} S_{\frac{1}{2}} f \right|^2 dx \leq C (1+|\frac{1}{2}|)^{-2(N+1)} \int_a^b \sum_{0 \leq l \leq p} \left| \frac{d^l}{dx^l} f(x) \right|^2 dx$$

但し、 $|\frac{1}{2}| \geq C_f$ 、 $f \in C_0^{\frac{1}{2}+1}(a, b)$ 、 $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$

証明は省くが、 $S_{\frac{1}{2}} f$ の表現を与える。

$N = \{ a < x < b \mid \psi(x) = 0 \}$ と置き、 $(a, b) \setminus N$ を、開区間

$(a_\mu, b_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ の disjoint union として表わす。

$S_{\frac{1}{2}} f$ を次式で定義する。

$$(1-5) \quad \dots \quad S_{\frac{1}{2}} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x) & (x \in N) \\ \int_{a_\mu}^x \exp\left(\frac{1}{2} \int_x^y \frac{1}{\psi(s)} ds\right) \frac{1}{\psi(y)} f(y) dy & (x \in (a_\mu, b_\mu) \text{ 同符号}) \\ - \int_x^{b_\mu} \exp\left(\frac{1}{2} \int_x^y \frac{1}{\psi(s)} ds\right) \frac{1}{\psi(y)} f(y) dy & (x \in (a_\mu, b_\mu) \text{ 異符号}) \end{cases}$$

以後、 $S_{\frac{1}{2}} f(x)$ を、 $S f(x, \frac{1}{2})$ と書く事にする。

次の補題を述べる前に記号を導入する。

$$(1-6) \quad \dots \quad T f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \exp(-iz \int_0^t \sigma(s) ds) f(t) dt \quad f \in L^1((\alpha, \beta))$$

$$(1-7) \quad \dots \quad \tilde{T} g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i \frac{t}{2} \int_0^s \sigma(s) ds) g(\frac{1}{2}) d\frac{1}{2} \quad \alpha < t < \beta$$

$$g \in L^1(\mathbb{R}_{\frac{1}{2}})$$

Lemma 1-2

K を (α, β) 内の任意の compact set、 k を K に於ける σ の零点の最大次数とする。

i) \dots $r \geq 0$ 、 $\chi \in C_0^\infty(K)$ に対し、定数 C が存在して、

$$(1-8) \quad \dots \quad \|\chi \tilde{T} g\|_r^2 \leq C \int (1+|\frac{1}{2}|^2)^{r + \frac{k}{2(k+1)}} |g(\frac{1}{2})|^2 d\frac{1}{2}$$

$$g \in L^1(\mathbb{R}_{\frac{1}{2}})$$

ii) \dots $\delta \geq \frac{k}{2(k+1)}$ なる δ に対し、定数 C が存在して、

$$(1-9) \quad \dots \quad \int (1+|\frac{1}{2}|^2)^{-\delta} |T f(\frac{1}{2})|^2 d\frac{1}{2} \leq C \|f\|_{-\delta + \frac{k}{2(k+1)}}^2$$

$$f \in L^1((\alpha, \beta)), \text{supp } f \subset K$$

iii) \dots 定数 C が存在して、

$$(1-10) \quad \dots \quad |T f(\frac{1}{2})| \leq C (1+|\frac{1}{2}|)^{-\frac{1}{k+1}} \sup_{\alpha < t < \beta} (|f(t)| + |f'(t)|)$$

$$f \in C_0^1((\alpha, \beta)), \text{supp } f \subset K, |\frac{1}{2}| \geq 1$$

但し i) ii) に於て、 $\|\cdot\|$ は Sobolev norm、右辺は $+\infty$ を許す。

i) ii) の証明の概略を述べる。

i) $0 < \tilde{s} < 1$ の場合に、 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\frac{n}{2}})$ に対して証明すれば良い。 $\delta > 0$ とし、 $\tilde{\chi}(\tau) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\frac{n}{2}})$ を $|\tau| \leq \delta$ で 1、 $|\tau| \geq 2\delta$ で 0 である関数とする。 K に於ける σ の zero 点を $\{t_i\}_{1 \leq i \leq N}$ とする。 $\chi_i(t) = \tilde{\chi}(\int_{t_i}^t \sigma(s) ds)$ と置く。

$$(1-11) \quad \dots \quad \chi \tilde{\tau} g = \sum_{1 \leq i \leq N} \chi \chi_i \tilde{\tau} g + \chi (1 - \sum_{1 \leq i \leq N} \chi_i) \tilde{\tau} g$$

δ を十分小さく取れば、 $\text{supp } \chi (1 - \sum_{1 \leq i \leq N} \chi_i)$ 上 $\sigma \neq 0$ 故、変数変換 $\tau = \int_0^t \sigma(s) ds$ を考えれば、(1-11) 右辺第二項に対し (1-8) が成立。従って $\chi_i \tilde{\tau} g$ ($1 \leq i \leq N$) に対して (i) を証明すれば良い。 δ を十分小さく取り、 σ を $\text{supp } \chi_i$ の外で適当に修正し、 σ の zero 点は t_i のみであるとして良い。

次の事に注意する。

(i) $0 < \tilde{s} < 1$ の時、 $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\frac{n}{2}})$ に対し、

$$\|V\|_{\tilde{s}}^2 \leq \int |V(x)|^2 dx + A_{\tilde{s}} \iint |V(x) - V(y)|^2 |x-y|^{-2\tilde{s}-n} dx dy \leq 2\|V\|_{\tilde{s}}^2$$

但し、 $A_{\tilde{s}} > 0$ は、 \tilde{s} のみに依存する定数

(cf. Hörmander [2] Lemma 2.6.1)

(ii) $0 < \alpha < 1$ に対し、定数 C_α が存在して、

$$\int |V(x)|^2 \frac{1}{|x|^\alpha} dx \leq C_\alpha \int \frac{1}{|x|^\alpha} |\hat{V}(\xi)|^2 d\xi \quad V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\frac{n}{2}})$$

この時 (i) は、 $\tilde{s}=0$ の場合、変数変換 $\tau = \int_{t_i}^t \sigma(s) ds$ を行い、(ii) を用いれば証明出来る。

$0 < \tilde{s} < 1$ の場合は、(i) に於て、 $x=t$ 、 $y=t$ 、と置き、 (t, t) 空間での積分領域を、次の様に分割する。 $\varepsilon > 0$ として、

$$R_1 = \{(t, t') \mid |t| \leq \varepsilon, |t'| \leq \varepsilon\}, \quad R_2 = \{(t, t') \mid |t| \geq \varepsilon, |t'| \leq \varepsilon\},$$

$$R_3 = \{(t, t') \mid |t| \leq \varepsilon, |t'| \geq \varepsilon\}, \quad R_4 = \{(t, t') \mid |t| \geq \varepsilon, |t'| \geq \varepsilon\}.$$

$\varepsilon > 0$ を適当に小さく取り、(1) 及び、変数変換 $\tau = \int_{t_0}^t \omega(s) ds$ を行えば、 $0 < \tau < 1$ の場合に証明出来る。

ii) の証明は i) の duality によって出来る。

§2 Parametrix の構成

先ず記号を導入する。

$$H_{r,s} = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{t'}) \mid \|f\|_{r,s}^2 = \iint (1+|x|^2)^r (1+|t'|^2)^s |\hat{f}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau < +\infty \right\}$$

$$H_{r,s}^{loc}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \omega f \in H_{r,s} \text{ for } \forall \omega \in C_0^\infty(\Omega) \}$$

$$H_{r,s}^\circ(\Omega) = \mathcal{E}'(\Omega) \cap H_{r,s}$$

$$H_{r,s,K}^\circ(\Omega) = \{ f \in H_{r,s}^\circ(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ の } x \text{ 方向の射影 } (K \ll (\alpha, \beta)) \}$$

但し、 r, s は任意の実数、 K は (α, β) 内の compact set

Theorem 2-1

L, Ω を §0 に於けるものとし、(0-2) (0-3) を仮定する。

この時、任意の自然数 j に対し、linear mapping $E_j, R_j,$

R'_j 、で以下の性質 (2-1) — (2-7) を持つものが存在する

$$(2-1) \quad \dots \quad E_j : H_{0,0}^\circ(\Omega) \longrightarrow H_{0,0}^{loc}(\Omega)$$

$$(2-2) \quad \dots \quad R_j : H_{r,s}^\circ(\Omega) \longrightarrow H_{r,\tilde{s}}^{loc}(\Omega)$$

$$(2-3) \quad \dots \quad R'_j : H_{r,s}^\circ(\Omega) \longrightarrow H_{r,\tilde{s}}^{loc}(\Omega) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (2-2) \\ (2-3) \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} r, s, \tilde{s} \text{ は任意の} \\ \text{実数} \end{array}$$

$$(2-4) \dots L E_j f = f + R_j f \quad \text{in } \Omega \quad \text{for } \forall f \in H_{0,0}^{\circ}(\Omega)$$

$$(2-5) \dots E_j L f = f + R_j^* f \quad \text{in } \Omega \quad \text{for } \forall f \in H_{0,0}^{\circ}(\Omega)$$

$$\text{a.t. } L f \in H_{0,0}^{\circ}(\Omega)$$

(2-6) $\dots \forall w \in C_0^\infty(\Omega)$ を取り、 l_w を、 $\text{supp } w$ の右方向への射影に於ける σ の zero 点の最大次数とする。

$\forall K$ compact set in (α, β) に対し、 l_K を K に於ける σ の zero 点の最大次数とする。

$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_w+1} + \frac{1}{l_K+1} \right)$ と置く。この時、 $0 \leq \forall p \leq j$ に対し、定数 C (f に無関係) が存在し、次の不等式が成立する。

$$\|w\|_{\frac{\partial}{\partial x}^p} E_j f \|_{0,0} \leq C \|f\|_{p,-\delta} \quad \text{for } \forall f \in H_{p,0,k}^{\circ}(\Omega)$$

(2-7) $\dots K$ 及び w を、(2-6) に於けるものとする。 f に無関係な定数 C が存在して、次の不等式が成立する。

$$\|w R_j f\|_{r,\tilde{s}} \leq C \|f\|_{r,s}$$

$$\|w R_j^* f\|_{r,\tilde{s}} \leq C \|f\|_{r,s}$$

但し、 $f \in H_{r,s,k}^{\circ}(\Omega)$ 、 r, s, \tilde{s} は任意の実数。

(proof)

$f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して、 E_j, R_j, R_j^* を定義する。一般的な場合への拡張は、mollifier による近似を用いれば良い。

$\chi_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ を、 $\chi_j(x) = 0$ for $|x| \leq 2C_j+1$ 、 $\chi_j(x) = 1$ for

$|x| \geq 3C_j+1$ なる関数とする。ここで定数 C_j は、Lemma 1-1

に於て定められたものである。以後証明中に於て、 $\text{supp } f$ を縮く事にする。

operators U, E を次式で定義する。

$$(2-8) \quad \dots Uf(x, z) = \chi(z) S \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iz \int_0^t \sigma(s) ds) f(\cdot, t') dt' \right) (x, z)$$

$$(2-9) \quad \dots Ef(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i z \int_0^t \sigma(s) ds) Uf(x, z) dz$$

Lemma 1-1 (1-4-1) 及び、Lemma 1-2 (1-10) より (2-9) は、
well defined であり、 Ef は、 x に関し f 同様に連続可微分
である事がわかる。更に次式が成立する。

$$(2-10) \quad \dots \frac{\partial^p}{\partial x^p} Ef(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i z \int_0^t \sigma(s) ds) \frac{\partial^p}{\partial x^p} Uf(x, z) dz$$

($0 \leq p \leq j$)

(2-10) に対し、Lemma 1-2 (1-8)、Lemma 1-1 (1-4-2)、及び
Lemma 1-2 (1-9) を順次適用すれば、 $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し、(2-8)
が成立する。他方 f が σ の zero 点の近傍で zero である場合、
 Ef は、 t に関しても連続可微分かつ微分と積分の順序交換
可能であり、Lemma 1-1 (1-2) 及び Fourier 反変公式を用い
て次式を得る。

$$(2-11) \quad \dots LEf(x, t) = f(x, t) + \frac{\sigma(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i z \int_0^t \sigma(s) ds) (\chi(z)-1) f(x, t) dz dt$$

一般の $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対しては、 f を σ の zero 点の近傍で 0 と

なり更に Ω 内の共通の compact set 内に support を持つ $C_0^\infty(\Omega)$ 関数で L^2 近似すれば、 $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して (2-6) が成立する事より、やはり (2-11) が成立する事が分る。

ここで、 R 及び R' を次の様に定義する。

$$(2-12) \quad \dots Rf(x, t) = \frac{\sigma(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iiz) \int_t^{\infty} \sigma(s) ds (X(z) - 1) f(x, t) dt dz$$

$$(2-13) \quad \dots R'f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iiz) \int_t^{\infty} \sigma(s) ds (X(z) - 1) \sigma(t) f(x, t) dt dz$$

この時、(2-4) が $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し成立する。(2-5) も同様にすれば、 $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対する成立を得る。

(2-7) の不等式は、(2-12)、(2-13) より容易に出る。 (q.e.d)

§ 3. L^2 - 評価

Lemma 3-1

E_j を、Theorem 2-1 で構成された parametrix とする。

$0 \leq p \leq j$ に対し、 $(\varphi \frac{\partial}{\partial x})^p f \in H_{0,0}^p(\Omega)$ である様な $f \in H_{0,0}^p(\Omega)$ に対して、次の等式が成立する。但し、そこで、 $\sigma_{p,k}$ 、 $\sigma_{p,l,m}$ は、 f に無関係な $C^\infty(\alpha, \beta)$ に属する関数である。

$$(3-1) \quad \dots \frac{\partial^p}{\partial t^p} E_j f = \sum_{k=1}^p \sigma_{p,k}(t) E_j (\varphi \frac{\partial}{\partial x})^k f + \sum_{0 \leq l+m \leq p-1} \sigma_{p,l,m}(t) \frac{\partial^l}{\partial t^l} (\varphi \frac{\partial}{\partial x})^m (f + R_j f)$$

(proof)

Lemma 1-1 (1-3) 及び Th 2-1 (2-4) を用いれば、帰納的 ($p=1$ に関して)

1に証明出来る。(q, e, d)

Lemma 3-2

E_j を、Lemma 3-1に於けるものとする。 $\omega, \tilde{\omega} \in C_0^\infty(\Omega)$ を、 $\omega = 0$ near $\text{supp } \tilde{\omega}$ なる関数とする。 $0 \leq p \leq j$ なる整数を固定する。この時、任意の非負整数 q に対し、次の事が言える
 $f \in H_{p,0}^{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow \tilde{\omega} E_j(\omega f) \in H_{p,q}$ 。更に、 f に無関係な定数 C が存在して、次の不等式が成立する。

$$(3-2) \quad \cdots \|\tilde{\omega} E_j(\omega f)\|_{p,q} \leq C \|\omega f\|_{p,0} \quad f \in H_{p,0}^{\text{loc}}(\Omega)$$

証明略

Theorem 3-3

I, J を任意の非負整数とする。 $u \in H_{I,0}^{\text{loc}}(\Omega)$ とし、更に、 $0 \leq k \leq J, 0 \leq l+m \leq J-1$ に対し、 $(\varphi \frac{\partial}{\partial x})^k(Lu), \frac{\partial^l}{\partial t^l} (\varphi \frac{\partial}{\partial x})^m(Lu) \in H_{I,0}^{\text{loc}}(\Omega)$ を仮定する。この時、 $u \in H_{I,J}^{\text{loc}}(\Omega)$ であり、次の形の評価が成立する。

$\omega, \tilde{\omega} \in C_0^\infty(\Omega)$ を、 $\omega = 1$ near $\text{supp } \tilde{\omega}$ なる関数とし、 $l_\omega, l_{\tilde{\omega}}$ を、各々、 $\text{supp } \omega, \text{supp } \tilde{\omega}$ の t -projectionに於ける σ の零点次数の最大値とする。 $\delta = \frac{1}{2}(\frac{1}{l_\omega+1} + \frac{1}{l_{\tilde{\omega}}+1})$ と置く。任意の正整数 N に対し、 u に無関係な定数 C が存在し、次の不等式が成立する。但し、 $f = Lu$ と置く。

$$(3-3) \quad \cdots \|\tilde{\omega} u\|_{I,J} \leq C \left(\sum_{0 \leq k \leq J} \|(\varphi \frac{\partial}{\partial x})^k(\omega f)\|_{I,-\delta} + \sum_{0 \leq l+m \leq J-1} \|(\varphi \frac{\partial}{\partial x})^m(\omega f)\|_{I,l} \right. \\ \left. + \|(L\omega)u\|_{I,0} + \|\omega u\|_{I,-N} \right)$$

(proof)

Th 2-1 (2-5) を、 $f=I$ として適用すれば、次式を得る。

$$(3-4) \quad \dots \quad \tilde{w}u = \tilde{w}E_I(wf) + \tilde{w}E_I((Lw)u) - \tilde{w}R'_I(wu)$$

従って、(3-3)は、Th 2-1 (2-6)、(2-7) 及び、Lemma 3-1, Lemma 3-2 より従う。(q.e.d)

参考文献

- [1] R. Beals and C. Fefferman: On the solvability of linear partial differential equations with C^∞ coefficients to appear
- [2] L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators 1963
- [3] L. Nirenberg and F. Trèves: Solvability of a first order linear partial differential equation, Comm. Pure. Appl. Math. 16 (1963) 331-351
- [4] ————— : On local solvability of linear partial differential equations, Part I: Necessary Conditions Comm. Pure. Appl. Math. 23 (1970) 1-38
- [5] ————— : On local solvability of linear partial differential equations, Part II: Sufficient Conditions, Comm. Pure. Appl. Math. 23 (1970) 459-510
- [6] F. Trèves: A new method of proof of the subelliptic estimates, Comm. Pure. Appl. Math. 24 (1971) 71-115

- [7] ——— : Hypoelliptic Partial differential equations of principal type, Sufficient conditions and necessary conditions, Comm. Pure. Appl. Math. 24 (1971) 537-570

〈追記〉

予稿集に於ける、Th 3-3 の $0 < \delta < \frac{1}{2}(\ell_{\omega+1})^{-1}$ を、 $\delta = \frac{1}{2}(\frac{1}{\ell_{\omega+1}} + \frac{1}{\ell_{k+1}})$ として良い事が分った。その為 Lemma ~~2~~₁₋₂ の内容が変更されている。更に、Th 2-1 (2-6) に於いて、 $0 < \delta < \frac{1}{2}(\ell_{\omega}^{-1})$ の代りに、 δ を、 $\delta = \frac{1}{2}(\frac{1}{\ell_{\omega+1}} + \frac{1}{\ell_{k+1}})$ と変更している。